Chapitres 20 et 21 : probabilités générales - variables aléatoires discrètes
Feuille d'exercices

Revisions :

Exercice 1 Une boîte contient 100 dés 6 faces, dont 25 exactement sont truqués. Les 75 autres sont équilibrés.

Si on lance un dé truqué, la probabilité qu'il donne 1 est $\frac{1}{2}$, et il donne l'un des autres chiffres $(2, 3, 4, 5$ ou $6)$ de manière équiprobable.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 pour un dé truqué ?
2. On choisit au hasard un dé dans la boite et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ?
3. On a lancé le dé et on a obtenu 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

Exercice 2 Soit n et N deux entiers naturels non nuls.

On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. Pour chaque $i \in [\![0, n]\!]$, l'urne numerotée i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.

Chaque urne contient donc n boules au total.

On choisit au hasard une urne, puis on y effectue une suite de N tirages consécutifs avec remise.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose A_i l'événement "on choisit l'urne i". Et pour $k \in [\![1, N]\!]$ on note B_k l'événement "on tire une boule blanche au $k-$ème tirage".

1. Déterminer $P(A_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$, $k \in [\![1, N]\!]$. Que vaut $P_{A_i}(B_k)$?
3. En déduire $P(B_k)$.

Exercice 3 Soit $N \geq 2$.

On suppose que dans une prairie il y a N terriers, au départ inoccupés. On libère deux lapins dans la prairies qui vont choisir au hasard un terrier où habiter. On suppose que les choix des lapins sont indépendants, et qu'ils peuvent habiter dans le même terrier.

Soit T la variable aléatoire donnant le nombre de terriers occupés une fois les lapins installés.

Déterminez la loi de T.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![0, 2n]\!]$.

1. Déterminez la loi de $Y = X - n$.
2. Déterminez la loi de $Z = \dfrac{X}{2}$
3. Déterminez la loi de $T = |X - n|$
4. Tracer les fonction de répartion de X, Y, Z et T pour $n = 3$.

Exercice 5 Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. Un joueur tire simultanément 3 boules au hasard. Il gagne 1 euro par boule blanche obtenue, et perd 2 euros par boule noire tirée. On note X son "gain" ($X < 0$ s'il perd de l'argent).

Déterminez la loi de X, son espérance et tracer sa fonction de répartition.

Probabilité générale

Exercice 6 Dans cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel appartenant à $[\![1, N-1]\!]$. On dispose d'une urne qui contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches (l'urne contient donc en tout N boules).

Une épreuve aléatoire consiste à effectuer indéfiniment des tirages d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée, dans cette urne.

On note A_j l'événement « on n'obtient aucune boule blanche lors des j premiers tirages ». On note B l'événement « on obtient au moins une boule blanche lors de cette épreuve ».

Calculer la probabilité de $\bar{B}$ en utilisant les événements A_j puis donner la valeur de $P(B)$.

Exercice 7 On s'intéresse au nombre de clients à la caisse d'un grand magasin et on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité que k clients soient reçus entre 14h et 15h est

$$p_k = \alpha \frac{5^k}{k!}$$

où α est un réel fixé.

1. Déterminez α
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et soient les événements A : "'il y a eu un nombre pair de clients"' et B : "'il y a eu un nombre impair de clients"'.
   Calculez $\lim_{n\to+\infty} S_n(5) + S_n(-5)$. En déduire $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 8 On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants et on suppose que la série de terme général $P(A_n)$ diverge. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on pose : $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

1. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = +\infty$.
2. a) Montrer que $P(C_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\bar{A}_i\right)$.
   b) Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, 1-x \leq e^{-x}$. En déduire que $P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.
   c) Montrer enfin que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$.
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $C_n \subset C_{n+1}$.
   b) Justifier que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ puis en déduire que $P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

Variables aléatoires

Exercice 9 (réponse au hasard en colle)

Un élève, n'ayant pas bien compris son cours, tente de répondre au hasard à son heure de colle bi-hebdomadaire. Comble de malchance, le stress lui faisant perdre ses moyens, il oublie systématiquement la réponse qu'il vient de faire tandis que le professeur lui repose la même question tant que la réponse n'est pas la bonne.

L'élève choisit donc au hasard le théorème de cours qu'il cite pour justifier son résultat à chaque question du professeur, parmi les dix théorèmes du chapitre concerné, et peut donc citer deux fois de suite le même.

Soit X le nombre d'essais avant de tomber sur le bon, y compris l'essai concluant.

Déterminez la loi de X et son espérance.

Exercice 10 La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est donnée par $P(X = k) = \frac{C}{k(k+1)}$.

1. Trouver la valeur de C.
2. X admet-elle une espérance ? une variance ?
3. Montrez que $\sqrt{X}$ possède une espérance.

Exercice 11 Un perchiste participe à une épreuve de saut à la perche et tente de sauter des hauteurs numérotées $1, 2, 3, \ldots$.

Il doit faire les sauts dans l'ordre et on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant qu'il a réussi à sauter les $n-1$ hauteurs précédentes, il réussit à sauter la hauteur numero n avec la probabilité $1/n$. Enfin, il est éliminé dès qu'il rate un saut.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du dernier saut réussi.

Déterminez la loi de X et son espérance.

Exercice 12 Un peintre en bâtiment est en train de repeindre le mur d'un immeuble. Une personne passant sous l'échafaudage de ce peintre a une probabilité p d'être taché par une goutte de peinture perdue. On considère que le nombre N de personnes passant sous l'échafaudage dans la journée pendant que le peintre peint est donné par une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les personnes sont tâchées indépendamment les unes des autres.

Soit X le nombre de passants tachés dans une journée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de X sachant que $N = n$?
2. En utilisant le s.c.e. $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminez la loi de X.

Exercice 13 Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n+1) = \dfrac{a}{n}P(X = n)$.

1. Soit $u_n = (n-1)!P(X = n)$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de a, n et $P(X = 1)$.
2. Déterminez $P(X = 1)$ puis donner la loi de X.
3. Soit $Y = X - 1$. Reconnaître la loi de Y, et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14 On fixe n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère un ascenseur initialement au rez-de-chaussée d'un immeuble de n étages en plus du rez-de-chaussée.

Des passagers entrent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée, et ne feront ensuite que sortir de l'ascenseur au cours de son ascension : on considère qu'aucun passager n'entre dans l'ascenseur une fois qu'il a quitté le rez-de-chaussée.

On suppose que chaque passager a choisi son étage d'arrivée au hasard entre 1 et n et indépendamment des autres passagers.

On note S la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur au cours de sa montée,

et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts où sont descendus les k premiers passagers uniquement.

Dit autrement, S_k est le nombre d'arrêts provoqués par les k premiers passagers.

1. Déterminer $S_k(\Omega)$.
   On suppose désormais que $k \geq n$.
2. Montrer que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P(S_{k+1} = j) = \dfrac{j}{n}P(S_k = j) + \dfrac{n-j+1}{n}P(S_k = j-1)$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, x^k.$$

   On dit que G_X est la "fonction génératrice" de X.
   Montrer que $E(X) = G'_X(1)$, puis déterminer une relation entre $V(X)$, $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
4. a) On note G_k la fonction génératrice de S_k. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_{k+1}(x) = x\, G_k(x) + \frac{x(1-x)}{n}G'_k(x).$$

   b) Déterminer $E(S_{k+1})$ en fonction de $E(S_k)$.
   c) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E(S_k) = n - (n-1)\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big)^{k-1}$.
   d) Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} E(S_k)$. Justifier intuitivement le résultat obtenu.
5. On pose $S_0 = 0$ et on suppose que le nombre de personnes qui entrent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'espérance conditionnelle de S sachant $(Y = k)$.
   b) Montrer que S admet une espérance et la déterminer.
   c) Vers quoi l'espérance de S tend-elle lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 15 On désigne par k et n deux entiers naturels non nuls. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus et par Y_n la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus.

1. a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, déterminer $P(X_n \leq i)$, puis en déduire la loi de X_n.

   b) Montrer que $E(X_n) = n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^k$, puis vérifier que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$.

2. a) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, déterminer $P(Y_n > i)$, puis $P(Y_n = i)$.

   b) Montrer que $E(Y_n) = \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^k$, puis vérifier que $E(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{k+1}$.

Exercice 16 On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "pile" ou "face" avec la probabilité 1/2 chacun. On note P_k (respectivement F_k) l'événement : « on obtient "pile" (respectivement "face") au $k^{\text{ème}}$ lancer ». On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "pile" puis "face" dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2).

1. Montrer, en considérant le résultat du premier lancer, que :

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$$

2. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à $2, u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\geq 2}$ est arithmétique puis déterminer $P(X = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 17 On effectue une suite de tirages avec remise dans une urne contenant des boules blanches en proportion p élément de $]0, 1[$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$, ces boules étant indiscernables au toucher. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors des k premiers tirages et on note B_k l'événement « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ». Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on obtient la n^{eme} boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_k.
2. a) Déterminer $Y_n(\Omega)$, puis, pour tout i de $Y_n(\Omega)$, écrire l'événement $(Y_n = i)$ à l'aide de la variable aléatoire X_{i-1} et de l'événement B_i.

   b) En déduire la loi de Y_n puis utiliser le résultat de l'exercice 25.9 pour montrer que Y_n possède une espérance et la déterminer.

Exercice 18 Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant une certaine durée x, on s'intéresse à la probabilité pour qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée y. Pour cela, on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité P. L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

On suppose que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (l'unité de temps est le jour) et que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P(X = n)}$ n'est pas nulle. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{p_n = P(X = n)}, \quad \mathrm{G_n = P(X \geqslant n)} = \sum_{\mathrm{k=n}}^{+\infty} \mathrm{p_k} \quad \text{et} \quad \mathrm{Z_n} = \frac{\mathrm{p_n}}{\mathrm{G_n}}$$

Le nombre Z_n s'appelle le coefficient de vieillissement.

1. Soit $n \geqslant 1$.
   a) Justifier les inégalités $0 < \mathrm{p_n} < \mathrm{G_n} \leqslant 1$ et $0 < \mathrm{Z_n} < 1$.
   b) Établir l'égalité $\mathrm{P}(X \geqslant n+1 \mid X \geqslant n) = 1 - Z_n$ et justifier le nom donné à Z_n.
2. a) Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.
   b) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante p appartenant à $[0; 1]$ telle que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la suite constante égale à p. Montrer par récurrence que X suit une loi géométrique.
3. Démontrer que si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $(p_{n+m}/p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil.